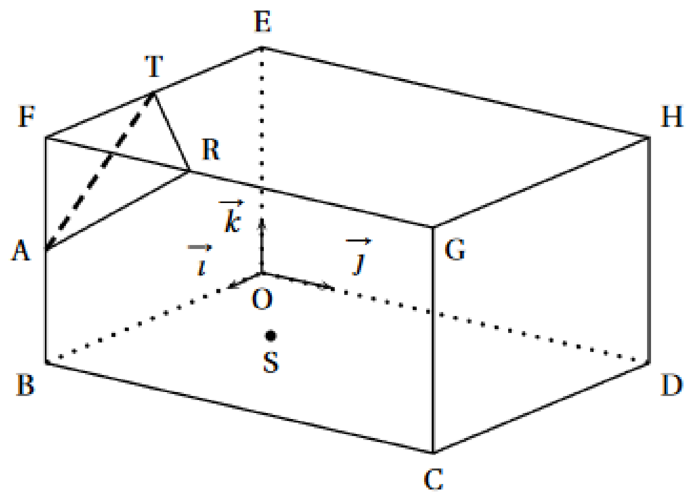
Sujet

Une exposition d'art contemporain a lieu dans une salle en forme de pavé droit de largeur 6 m, de longueur 8 m et de hauteur 4 m.
Elle est représentée par le parallélépipède rectangle OBCDEFGH où OB = 6 m, OD = 8 m et OE = 4 m.
On utilise le repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k}\right)$ tel que $\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{OD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OE}$.



Dans ce repère on a, en particulier C(6; 8; 0), F(6; 0; 4) et G(6; 8; 4).
Une des œuvres exposées est un triangle de verre représenté par le triangle ART qui a pour sommets A(6; 0; 2), R(6; 3; 4) et T(3; 0; 4), Enfin, S est le point de coordonnées $\left(3\,;\,\frac{5}{2}\,;\,0\right)$.

1. **a.** Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.

   b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AR}\cdot\overrightarrow{AT}$.

   c. En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{RAT}$.

2. **a.** Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ART).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (ART).

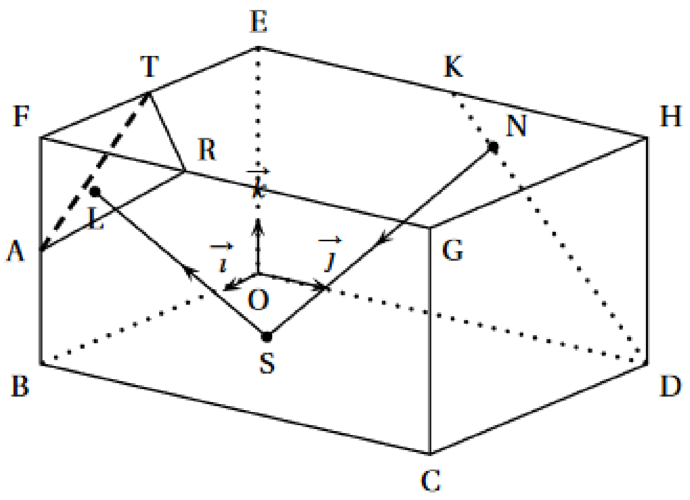
3. Un rayon laser dirigé vers le triangle ART est émis du plancher à partir du point S. On admet que ce rayon est orthogonal au plan (ART).

   a. Soit Δ la droite orthogonale au plan (ART) et passant par le point S.
   Justifier que le système ci-dessous est une représentation paramétrique de la droite Δ :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 3+2k \\ y & = & \frac{5}{2}-2k \\ z & = & 3k \end{array}\right., \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

   b. Soit L le point d'intersection de la droite Δ, avec le plan (ART).
   Démontrer que L a pour coordonnées $\left(5\,;\,\frac{1}{2}\,;\,3\right)$.

4. L'artiste installe un rail représenté par le segment [DK] ou K est le milieu du segment [EH].
Sur ce rail, il positionne une source lumineuse laser en un point N du segment [DK] et il oriente ce second rayon laser vers le point S.



a. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;1]$, le point N de coordonnées $(0\,;\,8-4t\,;\,4t)$ est un point du segment [DK].

b. Calculer les coordonnées exactes du point N tel que les deux rayons laser représentés par les segments [SL] et [SN] soient perpendiculaires.

Exercice

Pour chacune des questions, quatre propositions de réponse sont données dont une seule est exacte. Pour chacune des questions indiquer, sans justification, la bonne réponse sur la copie. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Il en est de même dans le cas où plusieurs réponses sont données pour une même question.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.

Le plan (P) a pour équation $x-2y+3z+5=0$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -2+t+2t' \\ y & = & -t-2t' \\ z & = & -1-t+3t' \end{array}\right.$

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -2+t \\ y & = & -t \\ z & = & -1-t \end{array}\right.$

On donne les points de l'espace $M(-1\,;\,2\,;\,3)$ et $N(1\,;\,-2\,;\,9)$.

1. Une représentation paramétrique du plan (P) est :

a. $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & t \\ y & = & 1-2t \\ z & = & -1+3t \end{array}\right.$

b. $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & t+2t' \\ y & = & 1-t+t' \\ z & = & -1-t \end{array}\right.$

c. $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & t+t' \\ y & = & 1-t-2t' \\ z & = & 1-t-3t' \end{array}\right.$

d. $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 1+2t+t' \\ y & = & 1-2t+2t' \\ z & = & -1-t' \end{array}\right.$

2. **a.** La droite (D) et le plan (P) sont sécants au point $A(-8\,;\,3\,;\,2)$.

b. La droite (D) et le plan (P) sont perpendiculaires.

c. La droite (D) est une droite du plan (P).

d. La droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.

3. **a.** La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.

b. La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.

c. La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.

d. La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.

4. **a.** Les plans (P) et (S) sont parallèles.

b. La droite (Δ) de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & t \\ y & = & -2-t \\ z & = & -3-t \end{array}\right.$ est la droite d'intersection des plans (P) et (S).

c. Le point M appartient à l'intersection des plans (P) et (S).

d. Les plans (P) et (S) sont perpendiculaires.